Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A.U. 2018-2019
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1

Examen de Rattrapage
Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Exercice 1.(6*pts*)
Les questions ci-dessous sont indépendantes:

(1) Soit A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}^+$. $\sqrt{A}$ désigne l'ensemble des $\sqrt{x}$, pour $x \in A$. Montrer que $\sqrt{A}$ admet une borne supérieure et
$$\sup \sqrt{A} = \sqrt{\sup A}$$

(2) Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $B = \{y = -x; \quad x \in A\}$
  (a) Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré.
  (b) En supposant que A est majoré, démontrer que B admet une borne inférieure et que
$$\inf(B) = -\sup(A)$$

(3) Calculer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum, s'ils existent, des ensembles suivants
$$\mathcal{N} = \left\{ \frac{n-1}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathcal{X} = \left\{ \frac{2xy}{x^2+y^2};\ x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^* \right\}$$

Exercice 2.(7*pts*)

(1) (a) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis (T.A.F).
  (b) Montrer que pour tout $x > 0$
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

(2) On considère la suite $(S_n)_n$ de terme général
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$
  (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$
  (b) En déduire la nature de la suite $(S_n)_n$.

(3) On considère la suite $(u_n)_n$ de terme général:
$$u_n = S_n - \ln(n)$$
  (a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée et décroissante.
  (b) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et que $\lim u_n \in [0, 1]$.

T.S.V

Exercice 3. (7 *pts*)

(1) **Question de cours:**
   (a) Rappeler la définition de la fonction $\arg\cosh$ et donner son domaine de définition.
   (b) Donner le domaine de dérivablitée de $\arg\cosh$ et sa dérivée.

   On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arg\cosh\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$$

   Le but de cet exercice est de simplifier l'expression de f. Précisement, on veut montrer, de deux manière différentes, que la fonction f s'écrit sous forme:

$$\forall x > 0, \quad f(x) = |\ln(x)| \quad (*)$$

(2) **En utilisant la dérivée:**
   (a) Montrer que $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \in [1, +\infty[$ si et seulement si $x \in]0, +\infty[$. En déduire le domaine de définition de f.
   (b) Donner le domaine de dérivation de f et calculer sa dérivée.
   (c) En déduire l'expression (*).

(3) **En utilisant l'expression de** $\arg\cosh$ **sous forme de logarithme :**
   (a) Montrer que : pour tout $x \geq 1$

$$\arg\cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

   (b) En déduire l'expression (*).